Aplicación de los modelos GARCH a la estimacion del VaR de acciones colombianas*

Revista Soluciones de Postgrado EIA, Número 3. p. 11-24 Medellín, enero 2009

Federico Ospina D'Aleman** y David Alejandro Giraldo Sánchez***

* Artículo basado en el trabajo de grado obligatorio para optar al Título de Especialista en Finanzas Corporativas de la Escuela de Ingeniería de Antioquia. Director: Fredy Pérez.

** Ingeniero Administrador y Especialista en Finanzas Corporativas, EIA. Analista de Contratación, Bancolombia. feospina@bancolombia.com.co

*** Ingeniero Industrial y Especialista en Finanzas Corporativas, EIA. Jefe de Sección, Bancolombia. davgiral@bancolombia.com.co

APLICACIÓN DE LOS MODELOS GARCH A LA ESTIMACION DEL VaR DE ACCIONES COLOMBIANAS

Federico Ospina D´Aleman y David Alejandro Giraldo Sánchez

Resumen

El aumento de la volatilidad de los mercados financieros durante las últimas décadas ha inducido a investigadores, profesionales y reguladores a diseñar y desarrollar herramientas de gestión de riesgos más sofisticadas. El Valor en Riesgo (VaR) se ha convertido en el estándar de medida que los analistas financieros utilizan para cuantificar el riesgo de mercado por la simplicidad del concepto y facilidad de interpretación. En este proyecto el VaR fue aplicado a la serie de rendimientos de las acciones de mayor bursatilidad del mercado colombiano y fue calculado con el método paramétrico utilizando el enfoque RiskMetrics y los modelos econométricos GARCH. En el análisis del RiskMetrics se debe suponer que la volatilidad de la serie se interpreta por los modelos integrados IGARCH (1,1). Para el cálculo del VaR con los modelos econométricos GARCH se aplica la metodología ARIMA para pronosticar los rendimientos de la serie, que generalmente tienen una varianza no constante en el tiempo, es decir, presentan la existencia de heteroscedasticidad y deben utilizarse los modelos autorregresivos generalizados de heterocedasticidad condicional (GARCH), tales como PGARCH, TGARCH, EGARCH, u otros modelos como IGARCH, GARCH-M para hallar la varianza condicional.

Palabras clave: GARCH, ARIMA, VaR, RiskMetrics.

Abstract

The increased volatility in financial markets over recent decades has led researchers, experts, and regulators to design and develop more sophisticated risk management tools. Value at Risk (VaR) has become the standard measure that financial analysts use to measure market risk due to its conceptual simplicity and easy interpretation. In this paper, Value at Risk (VaR) was applied to the returns of the biggest marketability shares of the Colombian stock market and it was calculated by the parametric method with the RiskMetrics approach and the econometric GARCH models. Under the RiskMetrics approach the variance of the series is computed using an IGARCH (1.1) model. For the calculation of VaR with econometric GARCH models, ARIMA methodology is applied to find the model that will help to forecast the returns of the series, this returns does not generally have a constant variance, showing the existence of Heteroscedasticity and should be used generalized autoregressive conditional heteroscedasticity models (GARCH), such as PGARCH, TGARCH, EGARCH, and other models as IGARCH, GARCH-M to find the conditional variance.

Palabras Clave: GARCH, ARIMA, VaR, RiskMetrics.

Aplicación de los modelos GARCH a la estimacion del VaR de acciones colombianas

Federico Ospina D'Aleman y David Alejandro Giraldo Sánchez

Revista Soluciones de Postgrados EIA, Número 3. p. 11-24. Medellín, enero 2009

Introducción

El VaR es una medición del riesgo de mercado definida por algunos autores como Jorion (1997) y Vilariño (2001) como la estimación de la pérdida máxima que puede tener la posición de un portafolio (los precios de mercado), con un cierto horizonte temporal y un determinado nivel de confianza. La correcta estimación del VaR exige un cálculo futuro de las volatilidades (desviación típica de la distribución de los rendimientos de un activo); esta estimación del VaR es uno de los valores críticos en la medición de los riesgos de los activos que conforman un portafolio de inversión.

Generalmente esta volatilidad se toma como estable en algunos modelos, sin embargo, el análisis de datos muestra la existencia de cambios significativos en la desviación de las series de rentabilidades (Engle, 2003). Al dejar estable la volatilidad, le resta capacidad predictiva al modelo. Por esta razón, es más preciso modelar las volatilidades a partir de modelos que realizan una estimación de las volatilidades futuras. Uno de estos modelos es el GARCH, que introduce los cambios en la volatilidad según un patrón establecido.

Para este proyecto se calculó el VaR utilizando modelos GARCH para analizar la serie de tiempo del precio de las acciones de Suramericana de Inversiones, Compañía Nacional de Chocolates, Bancolombia ordinaria, Banco de Bogotá, Fabricato e Inverargos, que están dentro de las 22 acciones reportadas como de alta bursatilidad, de acuerdo con el Índice de de Bursatilidad Accionaria publicado por la Superintendencia Financiera de Colombia.

Metodología

Los modelos de series de tiempo se utilizan para predecir los movimientos futuros de una variable basándose solamente en su comportamiento pasado.

Para la construcción de un modelo GARCH es necesario empezar por construir un modelo ARIMA (método de Box-Jenkins de 1994) para la serie de datos, que en este caso es la media de los retornos (serie estacionaria), de forma tal que se remueva toda la dependencia lineal de ellos (Box, Jenkins y Reinsel, 1994; Uriel, 2000; Wei, 1990).

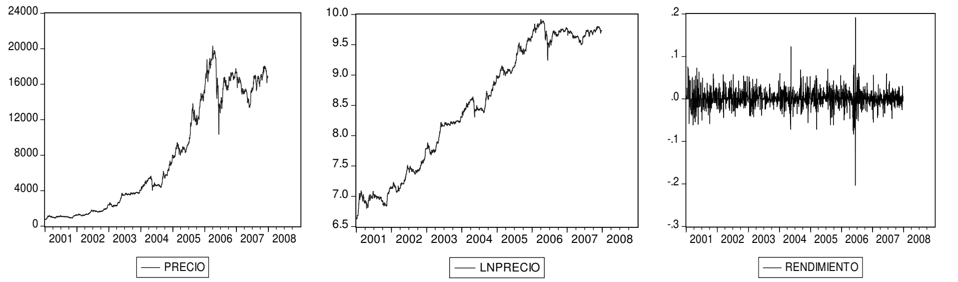
Los modelos de series de tiempo analizados por esta metodología se basan en el supuesto de que las series son débilmente estacionarias. Por tal razón el paso inicial es verificar la estacionariedad de la serie de datos (precio de cierre de las acciones). Una serie de tiempo debe ser diferenciada *d* veces para hacerla estacionaria y luego aplicar a esta el modelo ARIMA (p,d,q), es decir, una serie de tiempo autorregresiva integrada de media móvil, donde *p* denota el número de términos autorregresivos, *d* es el número de veces que la serie debe ser diferenciada para hacerse estacionaria y *q* el número de términos de media móvil.

Análisis de estacionariedad de las series

Con la herramienta del software econométrico EViews se realizaron y compararon los gráficos de la serie original de precios así como de las transformaciones que se le realizan para volverla estacionaria. Las transformaciones que se realizaron para analizar estacionariedad en la serie fueron: *ln (Precio)* y el rendimiento diario de las acciones (diferencia logarítmica de precios). En la gráfica de la serie de precios se observa una tendencia creciente en la curva, lo que indica que dicha variable parece ser no estacionaria en media, es decir, la media no será constante para todas las observaciones del proceso aleatorio para modelar. Algo similar se puede concluir al observar la gráfica de la transformación logarítmica del precio. Luego de diferenciar la serie y obtener los retornos, se observa que la gráfica va oscilando, pero sin alejarse de forma significativa de cero.

Para corroborar lo concluido con las gráficas, se analizó la función de autocorrelación. Para la serie de precios se observa que no es estacionaria, ya que los valores de autocorrelación se mantienen muy cercanos a 1 y disminuyen lentamente a medida que aumenta t, otro tanto pasa con la transformación logarítmica del precio. En la función de autocorrelación de los rendimientos se observa que los valores bajan rápidamente a cero, evidenciando que la serie es estacionaria.

Para todas las acciones se manejó la serie de los retornos, puesto que, por ser estacionaria, se puede utilizar para emplear la metodología ARIMA. En la figura 1 se muestra el análisis de estacionariedad para la acción Bancolombia ordinaria.



Included observations: 1822

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC
		1	0.999	0.999
		2	0.997	-0.026
		3	0.996	0.004
		4	0.994	0.017
		5	0.993	-0.004
		6	0.991	-0.008
		7	0.990	0.031
		8	0.989	0.022
		9	0.987	-0.001
		10	0.986	-0.032
		11	0.984	-0.019
		12	0.983	0.002
		13	0.982	-0.000
		14	0.980	-0.032
		15	0.979	-0.015

Included observations: 1822

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC
		1	0.999	0.999
		2	0.997	-0.009
		3	0.996	-0.002
		4	0.994	0.006
		5	0.993	-0.002
		6	0.991	-0.003
		7	0.990	0.012
		8	0.988	0.009
		9	0.987	-0.005
		10	0.985	-0.010
		11	0.984	-0.007
		12	0.982	-0.000
		13	0.981	-0.003
		14	0.979	-0.007
		15	0.978	0.017

Included observations: 1821

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC
		1	0.072	0.072
		2	-0.006	-0.012
		3	-0.041	-0.040
		4	0.021	0.027
		5	0.002	-0.002
		6	0.013	0.012
		7	-0.021	-0.021
		8	-0.022	-0.019
		9	0.024	0.028
		10	0.030	0.024
		11	-0.018	-0.023
		12	-0.015	-0.008
		13	0.059	0.062
		14	0.043	0.032
		15	0.046	0.040

Figura 1. Análisis gráfico y correlograma de una de las acciones evaluadas (Bancolombia ordinaria)

Identificación del modelo ARIMA

Para encontrar el orden (p,q) del modelo ARIMA que permita estimar la media de los retornos, se comenzó comparando el comportamiento de los estadísticos con funciones de autocorrelación (ACF) y autocorrelación parcial (PACF). Los rezagos que muestran valores significativos (picos) de la gráfica del ACF y del PACF son componentes importantes que deben ser analizados para encontrar el modelo. En otras palabras, los picos revelan un comovimiento significativo. Como se supone normalidad, se revisan en el correlograma los retardos donde la autocorrelación se sale de la banda calculada como $\pm Z_{\alpha/2} ee\rho_k$

En el PACF se muestran los picos que determinan el orden (p) de los modelos AR y se anulan a partir del rezago *p+1*. En el ACF se muestran los picos que determinan el orden (q) de un modelo MA. El comportamiento típico es que se anula a partir del rezago *q +1*.

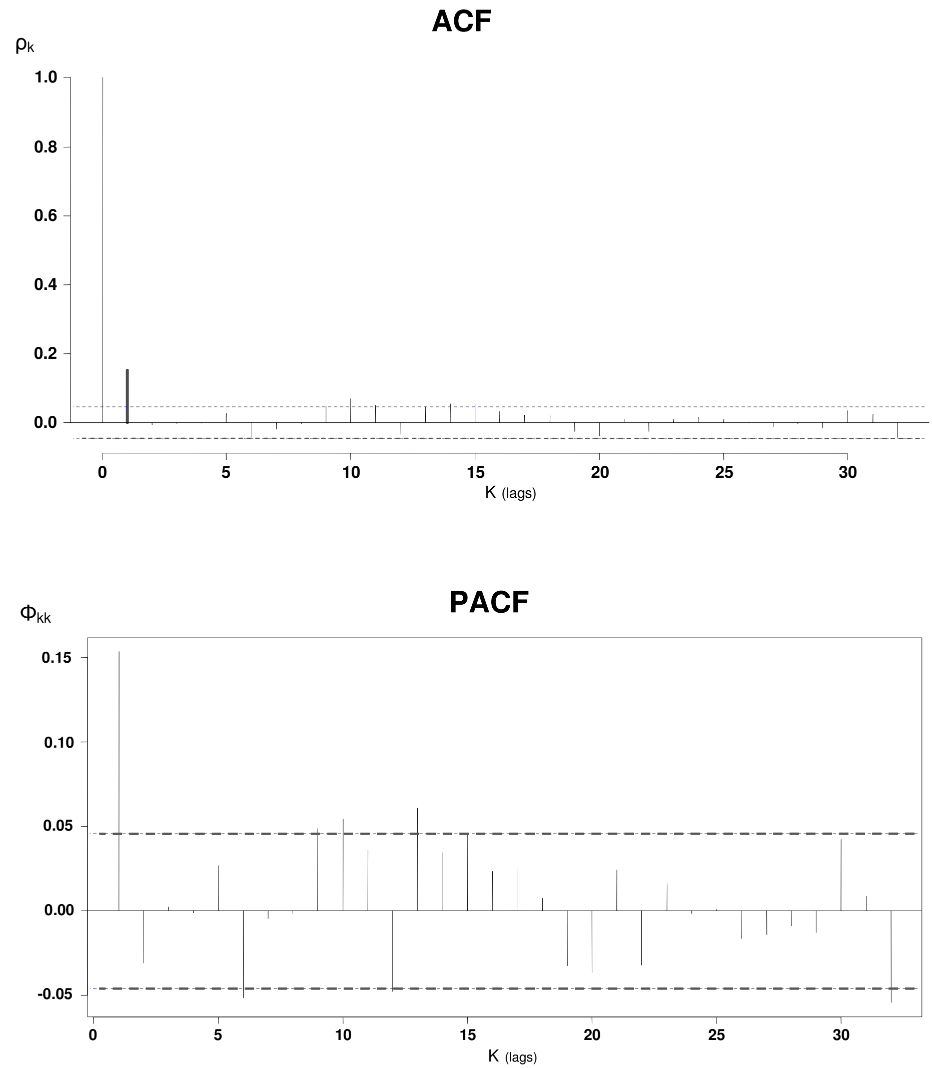


Figura 2. ACF y PACF acción de Suramericana de Inversiones

En la figura 2 se puede identificar un MA(1), donde el ACF tiene un solo pico que pasa la banda y en el PACF los primeros rezagos descienden rápidamente.

El ACF y el PACF son los elementos básicos de identificación para los modelos AR(p) y MA(q), sin embargo, cuando son modelos mixtos (ARIMA), el ACF y PACF no presentan patrones fácilmente identificables, por tal razón Tsay y Tiao desarrollaron el EACF (extended autocorrelation function) (Tsay, 2002). La forma de encontrar el orden consiste en identificar el triángulo formado por ceros que esté más arriba y a la izquierda de la tabla, lo que significa el modelo más parsimonioso.

El resultado del EACF se tabula de tal forma que las columnas corresponden al orden q del MA y las filas al orden p del AR. En la figura 3 se identifica un ARIMA de orden (1,4).

SIMPLIFIED EXTENDED ACF TABLE (5% LEVEL)

(Q-->)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
(P= 0)	X	X	X	X	X	0	0	0	X	0	X	X	X
(P= 1)	X	0	X	X	0	0	0	0	X	0	X	0	0
(P= 2)	X	X	X	X	0	0	0	0	0	0	X	0	0
(P= 3)	X	X	X	X	X	0	0	0	0	0	0	0	0
(P= 4)	X	0	X	X	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(P= 5)	X	0	X	X	0	X	0	0	0	0	0	0	0
(P= 6)	X	X	X	X	X	X	X	0	0	0	0	0	0

Figura 3. Función de autocorrelación extendida (EACF)

Habiendo identificado los valores apropiados de *p* y *q*, el siguiente paso es estimar los parámetros de los términos autorregresivos y de media móvil incluidos en el modelo ARIMA utilizando el software EVIEWS.

Todos los coeficientes estimados en el modelo deben ser significativos y para esto debe hacerse un contraste de hipótesis. Si un parámetro no es significativo, se elimina y se estima de nuevo el modelo.

Adicionalmente se deben tener en cuenta las condiciones para que los modelos en cuestión cumplan con los requisitos de estacionariedad e invertibilidad necesarios para poder hacer las predicciones.

Dado un modelo autorregresivo (AR) $r_t = \phi_0 + \phi_1 r_t - 1 + \ldots + \phi_0 + \phi_p r_t - p + a_t$ (donde a_t es un proceso de ruido blanco de media cero), para que sea estacionario debe cumplir las siguientes condiciones según el orden *p* del AR:

Para un AR(1): $|\phi_1|$ $|\phi_1|<1$

Para un AR(2): $\phi_1+\phi_2<1$, $\phi_1-\phi_2<1$, $|\phi_2|<1$

Para un AR(p): $\phi_1+\phi_2+\ldots+\phi_p \neq 1$

En un modelo de medias móviles (MA) $rt = \theta_0 + \theta_1 a_{1t-1} + \theta_2 a_{t-2} + \ldots + a_t$ (donde a_t es un proceso de ruido blanco de media cero), para que sea invertible debe cumplir las siguientes condiciones:

Para un MA(1): $|\theta_1|<1$

Para un MA(2): $\theta_1+\theta_2<1$, $\theta_1-\theta_2<1$, $|\theta_2|<1$

Para un MA(q): $\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_p \neq 1$

En un modelo de procesos mixtos autorregresivos y de medias móviles (ARMA)

$$r_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^{p} \phi_i r_{t-i} + a_t - \sum_{i=1}^{q} \theta_i a_{t-i}$$

(donde a_t es un proceso de ruido blanco de media cero).

Para que el proceso ARMA (1,1) sea estacionario e invertible, se deben cumplir las siguientes condiciones:

$|\theta_1|<1$ Invertibilidad,

$|\phi_1|<1$ Estacionariedad

Existencia de heteroscedasticidad

Luego de identificar el modelo ARIMA, se analizó si la serie de los residuos al cuadrado (a_t^2) del modelo escogido tiene efecto ARCH o posible existencia de heterocedasticidad[1] condicional en la varianza. Se realiza el test ARCH (test de multiplicadores de Lagrange) de Engle (1982). En este test se analiza el valor p del estadístico F, el cual debe ser menor que el nivel de significancia α (0,05) para concluir[2] la existencia del efecto de heteroscedasticidad en la serie de retornos de las acciones, lo cual significa que σ_t^2 no es constante ($E(a_t^2) \neq \sigma^2$).

Modelo GARCH

El modelo GARCH, introducido por Tim Bollerslev en 1986, da nombre a la ampliación de los modelos autorregresivos de heterocedasticidad condicional ARCH (Engle, 1982). Este modelo GARCH generaliza el modelo ARCH puramente autorregresivo.

$r_t = u + a_t r_t$, donde $a_t = \sigma_t \varepsilon_t$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \, a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_i \, \sigma_{t-j}^2$$

Usualmente se supone que $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, aunque para este estudio se evaluaron con distribuciones de colas pesadas.

Después de chequear la heterocedasticidad, se analizó la información de la distribución de la serie de los residuos, observando en todos los casos una curtosis[3] muy superior a la de una distribución normal (leptocurtosis). Para corroborar lo anterior se realizaron el test Jarque-Bera y el gráfico cuantil-cuantil[4] comprobándose en todos los casos que la distribución de los residuos no seguía una distribución normal.

Conociendo esta información, se decidió utilizar al momento de modelar los GARCH las distribuciones de colas pesadas GED[5] y t-Student.

---

1 Es la existencia de una varianza no constante en las perturbaciones aleatorias de un modelo econométrico.

2 Se rechaza H_0 si el *valor p* de F es menor que *α,* o si *F-statistic* > Obs*R-squared, lo que significa efectos ARCH. La prueba de hipótesis es: H_0: No existe efecto ARCH (varianza constante) y H_a: existe efecto ARCH.

3 La curtosis indica si la distribución es más aplanada o más puntiaguda que una distribución normal, es decir, si alrededor de la media se concentran más o menos valores y, por tanto, sus "*colas*" son más o menos estrechas.

4 El gráfico cuantil-cuantil permite observar cuán cerca está la distribución de un conjunto de datos a alguna distribución ideal.

5 Generalized Error Distribution (GED): distribución muy flexible que puede obtener varias formas dependiendo de sus parámetros. Si el parámetro $v = 2$, entonces la GED es igual que la normal; si $v = 2$, entonces tiene colas más pesadas que la normal.

La característica clave de un modelo GARCH, es que los errores siguen un modelo ARIMA. Por tanto, es de esperar que los residuales al cuadrado de un modelo ajustado sigan este patrón característico. Por tal razón, es usual utilizar las herramientas de identificación empleadas para la identificación de modelos ARIMA. Para empezar a modelar la volatilidad con los modelos GARCH, se analizó la serie de los residuos al cuadrado (a_t^2) del modelo ARIMA escogido para cada caso, por medio de la función de autocorrelacion extendida (EACF), para identificar el número de parámetros que se deberían modelar para el GARCH.

Al estimar los parámetros en el software se escogieron los mejores modelos, teniendo en cuenta que cumplieran con las restricciones de los modelos GARCH para asegurar que la varianza sea positiva $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0$, y que se cumpla la condición de estacionariedad.

$$\sum_{i=1}^{máx\{m,s\}} \alpha_i + \beta_i < 1$$

Modelo IGARCH y M-GARCH

Una vez obtenido el modelo GARCH para cada serie, se analizaron otros modelos como *el GARCH integrado IGARCH* (Bollerslev, 1986), que es un modelo de volatilidad no estacionaria de raíz unitaria, donde los parámetros α_i y β_j del modelo GARCH suman 1.

$a_t = \sigma_t \varepsilon_t$,

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_i \sigma_{t-j}^2$$

En donde: $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j = 1$

El modelo GARCH en media GARCH-M (Engle, Lilien y Robins, 1987) es un modelo de volatilidad estacionaria con premio al riesgo. Este modelo incluye en las ecuaciones de la media (ARIMA) la varianza condicional, la desviación estándar o el ln de la varianza condicional.

$$r_t = u + \boldsymbol{c\sigma_t^2} + a_t,\ r_t = u + \boldsymbol{c\sigma_t} + a_t$$

o $r_t = u + \mathbf{c}\ln(\boldsymbol{\sigma_t^2}) + a_t,\ \boldsymbol{c} > 0$

donde $a_t = \sigma_t \varepsilon_t$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_i \sigma_{t-j}^2$$

El parámetro c es llamado el parámetro de premio al riesgo. Un valor positivo de c indica que el retorno está positivamente relacionado con su volatilidad.

Modelos GARCH asimétricos

De forma empírica se observa que en los mercados bursátiles los movimientos a la baja son, por lo general, más volátiles que los movimientos al alza que les siguen, es decir, en un contexto financiero, los rendimientos negativos parecían ser predictores de la volatilidad más importantes que los positivos. Por esto, los investigadores introducen con mucho éxito una variante en los modelos GARCH asimétricos, precisamente para recoger este tipo de comportamientos, algunos de los cuales se presentan enseguida.

El Threshold GARCH (TGARCH), creado por Glosten, Jagannathan y Runkle (1993) y por Zakoïan (1994). Este modelo se usa con frecuencia para manejar efectos de asimetría o apalancamiento (*leverage*).

$r_t = u_t + a_t + a_t$, donde $a_t = \sigma_t \varepsilon_t$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{k=1}^{r} \gamma_k a_{t-k}^2 N_{t-k} + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

donde los parámetros α_i y β_j deben ser positivos, siguiendo condiciones similares a las de los modelos GARCH. En la estimación del modelo TGARCH, es necesario que el parámetro asimétrico γ_k sea positivo ($\gamma_k > 0$) y significativo, ya que este parámetro es el que permite que exista un efecto de apalancamiento o efecto *leverage*.

Modelo GARCH exponencial EGARCH, creado por Nelson (1991), que puede escribirse como:

$r_t = u_t + a_t$, con $a_t = \sigma_t \varepsilon_t$

$$\ln(\sigma_t^2) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \frac{|a_{t-i}| + \gamma_i a_{t-i}}{\sigma_{t-i}} + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \ln(\sigma_{t-j}^2)$$

Un valor positivo a_{t-i} contribuye $a_t(1+\text{y})|\varepsilon_{t-1}$, mientras que un valor negativo de a_{t-i} da un valor de $a_t(1-\gamma)\,|\,\varepsilon_{t-1}$, donde $\in_{t-1} = a_{t-i} / \sigma_{t-i}$. El parámetro γ es, entonces, el parámetro que da el efecto de apalancamiento de a_{t-i}. Se debe esperar que el parámetro asimétrico γ_i sea negativo en aplicaciones reales. Los efectos de apalancamiento pueden ser estimados mediante la hipótesis de que $\gamma_i < 0$.

Modelo Asymmetric Power GARCH (A-PARCH), en el cual el parámetro de potencia δ puede ser estimado en lugar de ser impuesto, y el parámetro opcional γ se adiciona para "capturar" las asimetrías en las series. La estructura del A-PARCH es la siguiente:

$r_t = u_t + a_t$, donde $a_t = \sigma_t \varepsilon_t$

$$\sigma_t^{\delta} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (|a_{t-i}| + \gamma_i a_{t-i})^{\delta} + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

Las restricciones propias de este tipo de modelos para garantizar su uso adecuado son: $\alpha_0 > 0,\ \delta \geq 0,\ \alpha_i \geq 0,\ -1 < \gamma_i < 1,$

$i = 1, \ldots, p,\ \ \beta_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, q$

Una serie de rendimientos de una accion puede tener varios modelos GARCH que cumplan con las diferentes restricciones propias del modelo; en este caso se deben analizar los residuales, y estos deben cumplir que sean ruido blanco y presentar homoscedasticidad. El ruido blanco o supuesto de un término residual no correlacionado puede evaluarse mediante el correlograma Q-Statistic y la homoscedasticidad mediante el efecto ARCH.

Para este proyecto se tuvieron en cuenta estos criterios y se evaluó si los modelos que se escogieron y se estimaron cumplían con estas condiciones.

En la tabla 1, se describen el correlograma Q-Statistic y el efecto ARCH para un EGARCH (1,1). El modelo presenta ruido blanco, porque el valor *P* de los rezagos es inferior a 0,05 y adicionalmente es homoscedástico, ya que la probabilidad del F-statistic es menor de 0,05.

Tabla 1. Correlograma Q-statictics y efecto ARCH

EGARCH(1,1) $\ln\left(\sigma_t^2\right) = \alpha_0 + \alpha_1 \frac{\lvert a_{t-1}\rvert + \gamma_1 a_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \beta_1 \ln\left(\sigma_{t-1}^2\right)$				
Correlograma Q-statistics				
Rezagos	ACF	PACF	Q-Stat	Prob.
1	0,067	0,067	6,9858	
2	0,052	0,048	11,210	0,001
3	0,010	0,003	11,356	0,003
4	-0,027	-0,031	12,504	0,006
5	-0,002	0,001	12,512	0,014
6	0,001	0,004	12,514	0.028
Efecto ARCH				
F-statistic	5,33461	Probabilidad		0,01267

En la tabla 2 se resumen de los modelos seleccionados para las diferentes acciones.

Tabla 2. Modelos ARIMA y GARCH de las series de rendimientos de las acciones

ACCIÓN	MODELO
Éxito A-PARCH(1,2)	$r_t = -0.10189\, a_{t-1} + a_t\,,\quad a_t = \sigma_t \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim t - \text{student}\ (v = 6)$ $\sigma_t^2 = 0{,}0000594 + 0.2968(\lvert a_{t-1}\rvert - 0.1350\ a_{t-1})^2 + 0.38846\sigma_{t-1}^2 + 0.090118\sigma_{t-2}^2$
Chocolates EGARCH(1,2)	$r_t = -0.103117\, a_{t-1} + a_t\,,\quad a_t = \sigma_t \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim t - \text{student}\ (v = 6)$ $\ln(\sigma_t^2) = -1{,}17809 + 0{,}354340 \frac{\lvert a_{t-1}\rvert - 0.052448 a_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + 0{,}792805 \ln(\sigma_{t-1}^2) + 0{,}102232 \ln(\sigma_{t-2}^2)$
Suramericana EGARCH(1,1)	$r_t = 0{,}00123 - 0{,}09602\, a_{t-1} + a_t\,,\quad a_t = \sigma_t \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim \text{GED}\ (1.5)$ $\ln(\sigma_t^2) = -0{,}750774 + 0{,}26074 \frac{\lvert a_{t-1}\rvert - 0.04027\ a_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + 0{,}929591 \ln(\sigma_{t-1}^2)$
Inverargos EGARCH(1,1)	$\ln(\sigma_t^2) = -1{,}15126 + 0{,}37079 \frac{\lvert a_{t-1}\rvert - 0{,}04838\ a_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + 0{,}893926 \ln(\sigma_{t-1}^2)$ $r_t = 0{,}00109 - 0{,}09973\, a_{t-1} + a_t\,,\quad a_t = \sigma_t \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim \text{GED}\ (1.5)$
Fabricato A-PARCH(1,1)	$r_t = -0{,}18222\, a_{t-1} + a_t\,,\quad a_t = \sigma_t \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim \text{GED}\ (1.5)$ $\sigma_t^1 = 0.00175 + 0.13640\ (\lvert a_{t-1}\rvert + 0.36307 a_{t-1})^1 + 0.841171\ \sigma_{t-1}^2$
Bancolombia EGARCH(1,1)	$r_t = 0{,}00102 - 0{,}07268\, a_{t-1} + a_t\,,\quad a_t = \sigma_t \varepsilon_t \qquad \varepsilon_t \sim \text{GED}\ (1.5)$ $\ln(\sigma_t^2) = -1{,}08678 + 0{,}28103 \frac{\lvert a_{t-1}\rvert - 0.03197 a_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + 0{,}891458 \ln(\sigma_{t-1}^2)$

Medición del VaR

Para cada una de las acciones se realizó el pronóstico para el periodo siguiente de la media (rendimiento de la acción modelo ARIMA), y con los GARCH se realizó el pronóstico de un día de la varianza. Para la acción del Banco de Bogotá, como no se detectó heteroscedasticidad, el cálculo se ejecutó utilizando la desviación estándar histórica de toda la muestra.

De acuerdo con la distribución que se supuso que seguían los residuales de cada uno de los modelos listados, se obtuvo el VaR con un nivel de confianza del 5% para un horizonte de tiempo de un día.

Con una distribucion normal y un α=0,005, la fórmula para calcular el VaR sería:

$$\text{VaR} = \hat{r}_t(1) - 1.65\hat{\sigma}_t(1)$$

Para una distribución GED (0,05;1,5) se cambia el cuantil de la normal de 1,65 y se agrega el cuantil 1,652739.

Para una distribución t-Student con v grados de libertad se usó el cuantil de la distribución t-Student estandarizada.

$$\text{VaR} = \hat{r}_t(1) + \frac{t_v(p)\hat{\sigma}_t(1)}{\sqrt{v/(v-2)}},$$

Los resultados se resumen en la tabla 3.

Tabla 3. Medición del VaR

Acción	Distribución	Cuantil	Pronóstico varianza un día	Pronóstico media un día	VaR al 5% para un horizonte de un día
ÉXITO	t (0,05;6)	1,943000	0,000384101	7,48E-04	$(3,034,441)
SURAMERICANA	GED(0,05;1,5)	1,652739	0,000216555	9,24E-04	$ (2,339,786)
BANCOLOMBIA	GED(0,05;1,5)	1,652739	0,000242051	0,00141472	$ (2,429,857)
CHOCOLATES	t(0,05;6)	1,943000	0,000120227	-3,88E-06	$ (1,739,902)
FABRICATO	GED(0,05;1,5)	1,652739	0,00064172	2,533218%	$ (3,220,969)
INVERARGOS	GED(0,05;1,5)	1,652739	0,000422319	1,75E-03	$ (2,476,536)
BOGOTÁ	Normal	1,645000	2,33E-05	0,01829556	$ (3,007,287)

RiskMetrics

La metodología RiskMetrics originalmente supone distribución normal, aunque más tarde, según el documento técnico de Riskmetrics/Reuters (1996), se aceptó la utilización de otras distribuciones con colas más pesadas, como es el caso de la GED. También establece que el modelo para pronosticar la varianza debe ser el IGARCH(1,1) ($a_t = \sigma_t\epsilon_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \beta_1\sigma_{t-1}^2 + (1-\beta_1)a_{t-1}^2$).

Se modelaron cada una de las acciones con modelos IGARCH aceptando la distribución normal.

El VaR del activo se calcula como $VaR = Monto\ invertido\ x\ Cuantil\ x\ \sigma_{t+1}$

La tabla 4 presenta los cálculos.

Tabla 4. Medición del VaR

Acción	Distribución	ß1	1 – ß1	Cuantil	Pronóstico Varianza 1-dia	VaR al 5% para un horizonte de un día
ÉXITO	Normal	0,073806	0,926194	-1,645	0,015254%	$ (2.031.674)
SURAMERICANA	Normal	0,055212	0,944788	-1,645	0,011740%	$ (1.782.350)
BANCOLOMBIA	Normal	0,064839	0,935161	-1,645	0,016664%	$ (2.123.522)
CHOCOLATES	Normal	0,051985	0,948015	-1,645	0,014333%	$ (1.969.425)
FABRICATO	Normal	0,067562	0,932438	-1,645	0,064172%	$ (4.167.144)
INVERARGOS	Normal	0,083299	0,916701	-1,645	0,027053%	$ (2.705.640)

Conclusiones y Recomendaciones

Las series de rendimientos de todas las acciones evidenciaron un exceso de curtosis en el análisis de estadística descriptiva, validando que las distribuciones de colas pesadas interpretan mucho mejor el comportamiento de estas series de tiempo.

En todos los casos analizados se detectaron racimos o *clusters* de volatilidad, por tal razón los modelos GARCH son adecuados para estudiar el comportamiento de los activos financieros. Solamente en la acción del Banco de Bogotá, una de las menos transadas de las acciones de alta bursatilidad en el 2007, no se presentó efecto ARCH.

En los casos analizados donde se detectó heteroscedasticidad, los modelos más significativos fueron los GARCH asimétricos, denotando que el efecto de apalancamiento es el que mejor puede interpretar este tipo de activos. Ello significa que las acciones evaluadas se ven afectadas en mayor magnitud por las malas noticias que por las buenas noticias. Esto refleja lo observado en el contexto financiero: las caídas fuertes de los precios producen predicciones de mayor volatilidad de las que produciría un aumento de los precios en la misma proporción.

El método utilizado habitualmente para calcular la varianza es el de la desviación típica muestral. Sin embargo, si el periodo es demasiado largo, no tendrá mucha relevancia para medir el riesgo del momento presente, y si es demasiado corto, tendrá mucho ruido. Por esto ha cobrado tanta importancia la estimación de la varianza con los modelos GARCH, pues permiten captar mejor la evolución de la dinámica de la volatilidad.

El valor del VaR que calculamos siguiendo la metodología RiskMetrics es menor que el evaluado con el método estándar con los modelos GARCH. Con esta información no podemos sacar conclusiones de cuál metodología se ajusta mejor para el cálculo del riesgo; como recomendación sería necesario utilizar metodologías de *backtesting*.

Referencias

BOLLERSLEV, T. (1986). "Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity". Journal of Econometrics. pp. 307-327.

BOX, G. E. P.; Jenkins, G. M. and Reinsel, G. C. (1994). Time series analysis: forecasting and control, 3rd ed. Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J.

ENGLE, R. (1982). Autoregresive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. Econometrica, 50(4):987-1007.

ENGLE, R. (2003) Riesgo y volatilidad: Modelos econométricos y práctica financiera. Revista Asturiana de Economía RAE Nº 31 (2004). pp. 221-252.

ENGLE, R.; Lilien, D. and Robins, R. (1987). Estimating time varying risk premia in the term structure: the ARCH-M model. Econometrica, 55, pp. 391-407.

GLOSTEN, L. R.; Jagannathan, R. and Runkle, D. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. Federal Reserve Bank of Minneapolis. Research Department Staff Report 157.

JORION, P. (1997). Value at risk: the new benchmark for controlling market risk. McGraw-Hill.

J.P.MORGAN/REUTERS RiskMetrics technical document. Fourth ed., New York, December 17, 1996. Appendix B. Relaxing the assumption of conditional normality.

NELSON, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: A new approach. Econometrica 59: 347-370.

TSAY, R. 2002. Analysis of financial time series. Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley and Sons.

URIEL, E. Introducción al análisis de series temporales. Modelos ARIMA. Paraninfo, España. 1 ed. 2000.

VILARIÑO, Ángel. (2001) Turbulencias financieras y riesgo de mercado. Prentice Hall.

WEI, W. S. 1990. Time series analysis. Addison-Wesley. 1990.

ZAKOÏAN, Jean. (1992). Threshold heteroskedastic models. Journal of Economic Dynamics and Control. 18: 931-955.

Otra bibliografía consultada

ENGLE, Robert and Ng. Victor K. Measuring and testing the impact of news on volatility. The Journal of Finance. Vol.5, pp.1749-1778.

Manual de EViews. Quantitative MicroSoftware Inc.

OSORIO Campos, Alexander. (2003). El VER: herramienta para la medición de riesgos de mercado. Apuntes de Banca y Finanzas.

PEREZ, Fredy O. (2008) Modelos ARIMA-ARCH, algunas aplicaciones a las series de tiempo financieras, Universidad de Medellín.

PINDYCK, R. S. and Rubinfeld, D. L. (1991) Econometric models and economic forecasts, third ed., McGraw-Hill, New York.

SUPERFINANCIERA. www.superfinanciera.gov.co

• Carta circular 006, enero de 2008

• Circular externa 031 de 2004, capítulo XXI: reglas aplicables a la gestión de los riesgos de mercado.

ZANGARI, Peter. (1996). An improved methodology for measuring VaR. RiskMetrics Monitor: Second quarter 1996.