Estructuración de portafolios que incluyen opciones

Revista Soluciones de Postgrado EIA, Número 4.p. 65-76. Medellín, agosto 2009

Jose Antonio Solano Atehortúa*

* Matemático, Universidad de Antioquia. Maestría en Matemáticas Aplicadas, Universidad de Sao Paulo (Sao Paulo, Brasil). Profesor de planta, Universidad de Antioquia. Ha trabajado como analista de riesgo de mercado.

ESTRUCTURACIÓN DE PORTAFOLIOS QUE INCLUYEN OPCIONES

Jose Antonio Solano Atehortúa

Resumen

Este artículo se propone formular problemas de selección de portafolios en términos de problemas de optimización cuadrática. Se considera que la rentabilidad esperada de las opciones europeas, de los activos con riesgo y de los activos sin riesgo, al igual que la matriz de covarianzas de los activos y las opciones, se conocen para usarlas en el método media-varianza en la solución del problema de selección óptima de carteras. En este trabajo se ve que encontrar la matriz de covarianzas es equivalente a aproximar numéricamente una integral impropia, con lo cual varios de los métodos numéricos existentes para resolver este problema pueden emplearse.

Palabras clave: opciones europeas, frontera eficiente, selección de portafolio óptimo.

Abstract

The main goal of this paper is to formulate portfolio selection problems in terms of quadratic optimization problems. For the mean-variance optimal portfolio selection problem we consider that the expected returns of the European-style options, risky and risk-free assets as well as the covariance matrix of the risky assets are exactly known. In the course of the presentation, the covariance matrix can be seen as a numerical approximation of an improper integral, so that some of the powerful numerical packages nowadays available for this class of problems can be used.

Key words: European-style Options, Efficient Frontier, Optimal Portfolio Selection.

Estructuración de portafolios que incluyen opciones

Jose Antonio Solano Atehortúa

Revista Soluciones de Postgrado EIA, Número 4.p. 65-76. Medellín, agosto 2009

Introducción

Una de las grandes inquietudes en el campo de las finanzas ha sido desarrollar modelos para explicar y predecir el comportamiento de los activos financieros. La teoría de la cartera (o del portafolio) brinda un conjunto de normas que prescriben la forma en que concretamente pueden construirse carteras con determinadas características que se consideran deseables; la teoría del portafolio es uno de los grandes aportes al desarrollo de las finanzas, fue formulada por Harry Markowitz y es fuente de la elaboración posterior de modelos que han tratado de explicar y predecir el funcionamiento del mercado de capitales. Uno de esos modelos es el de *Capital Asset Pricing Model* (CAPM), desarrollado, entre otros, por William F. Sharpe.

En el mercado financiero colombiano existe una gran gama de activos a disposición (por ejemplo, *commodities*, monedas, etc.), ya desde el año 2008 se abrió el mercado de derivados (activos cuyo precio depende del precio de otro activo, llamado subyacente). Combinarlos de forma conveniente para obtener un mayor retorno posible, o sea montar un portafolio óptimo, es el objetivo de todo inversor.

Suponer que las rentabilidades tienen una media y una varianza determinadas es el punto de partida para establecer las características que deben tener aquellos portafolios que son eficientes y permite sacar ventajas de la diversificación de las inversiones.

Un problema surge de forma natural: ¿Cuál es el retorno esperado que cabe atribuir a un activo?, o, dicho de otra manera, ¿cuál es el modelo de comportamiento del cambio del precio del activo? Como es sabido, cualquier modelo adoptado no podrá reflejar la realidad en forma total ni el riesgo en el portafolio formado podrá eliminarse totalmente. La situación se agrava si el portafolio contiene productos derivados que incluyen otro ingrediente más de riesgo, ya que dependen de los activos subyacentes.

Precios y correlaciones

Sea P el precio de mercado de un activo financiero (como una acción o una divisa). Se define la rentabilidad logarítmica del precio entre las fechas t y T, con $T > t$, mediante

$$r = \ln\left(\frac{P_T}{P_t}\right)$$

Se calculan la rentabilidad media y la desviación estándar de una muestra de n precios de un activo por

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_t P_t \qquad s^2 = \frac{1}{n}\sum_t (P_t - \bar{x})^2$$

El retorno logarítmico para una fecha de interés futura, T, se supone que posee distribución normal con media $\mu = \bar{x}\,T$ y varianza $\sigma^2 = (s\sqrt{T})^2$

$$x = \ln\left(\frac{P_T}{P_t}\right) \cong N(\mu, \sigma^2)$$

Por tanto, la función de densidad de probabilidad de la variable aleatoria x está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

y para el caso de dos o más activos distintos tenemos la función de densidad de probabilidad normal conjunta

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_i\,\sigma_j\sqrt{1-\rho_{ij}^2}} * e^{-\frac{1}{2\left(1-\rho_{ij}^2\right)}\left[\frac{(x-\mu_i)^2}{\sigma_i^2} - 2\rho_{ij}\frac{x-\mu_i}{\sigma_i}\frac{y-\mu_j}{\sigma_j} + \frac{\left(y-\mu_j\right)^2}{\sigma_j^2}\right]}$$

En donde los subíndices indican los activos a los que se les está calculando sus magnitudes, $\rho_{ij} = \frac{cov\ (i,j)}{s_i\, s_j}$ es el coeficiente de correlación entre el activo i y el activo j y

$$cov\ (i,j) = \frac{1}{N}\ \Sigma_t (P_{ti} - \bar{x})(P_{tj} - \bar{y})$$

es la covarianza entre las rentabilidades logarítmicas de los activos i y j.

Tasa de retorno de una opción

Una opción es un contrato que da a su titular o comprador un derecho futuro sobre algo, mientras que a su vendedor le establece una obligación futura, en el caso de que el titular de la opción lo solicite. En las opciones de compra (o *call*) el titular del contrato tiene el derecho de comprar algo (activo subyacente) por un precio determinado (precio de ejercicio). El comprador de la opción siempre hará lo que el nombre de la opción indique, de esta manera, el titular de una opción de venta (o *put*) tiene el derecho a vender algo en una fecha futura (fecha de vencimiento de la opción). La prima[1] de la opción es el precio por el cual la opción se negocia en el mercado, y en ocasiones no existen métodos analíticos para calcular su valor (*Wilmott et al.,* 1997).

En este estudio únicamente se tratará con opciones europeas, que se caracterizan porque el titular sólo puede ejercer su derecho en la fecha de vencimiento. La figura 1 muestra el valor de una opción de compra con precio de ejercicio de $3400 en la fecha de vencimiento. Por su parte, en la figura 2 se muestra la función del valor de la opción de venta con precio de ejercicio de $1800 en la fecha de vencimiento.

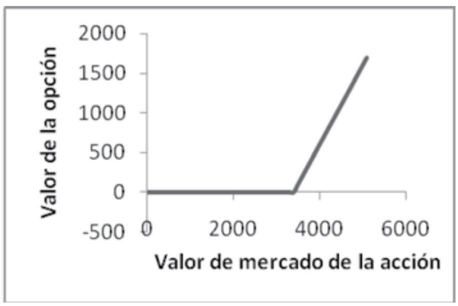

Figura 1. Valor de la opción de compra en la fecha de vencimiento.

1 El precio de mercado de una opción difiere del precio de la opción calculado con la fórmula de Black-Scholes, en gran medida, por el supuesto de volatilidad constante. En este estudio no se valoran opciones. Para modelos de volatilidad local y modelos de volatilidad estocástica para valorar opciones se puede consultar Venegas (2006).

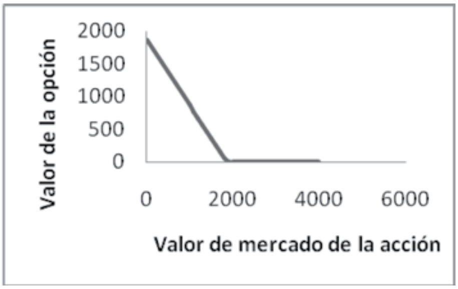

Figura 2. Valor de la opción de venta en la fecha de vencimiento.

La tasa de retorno de una acción para un periodo comprendido entre las fechas t y T con $(T>t)$ será

$$r_a = \frac{S_T - S_t}{S_t}$$

Se entiende que la acción en la fecha t se cotiza por S_t. En el caso de opciones de compra y venta se debe tener en cuenta su valor intrínseco en la fecha de vencimiento, con este valor y el premio pagado se deduce (Capinsky *y* Zastawniak, 2003) que las tasas de retorno están dadas por

$$r_c = \frac{\text{máx}\{S_T - K_c, 0\} - C_0}{C_0}$$

$$r_p = \frac{\text{máx}\{K_p - S_T, 0\} - P_0}{P_0}$$

respectivamente, en donde se ha adoptado la siguiente notación:

r_c, r_p: tasas se retorno de la opción
K_c, K_p: precios de ejercicio de la opción
C_0, P_0: primas de la opción

Los subíndices c y p se refieren a la opción *call* y *put* respectivamente.

Utilidad y riesgo

Un concepto importante en el análisis de decisiones es el de la actitud de las personas hacia el riesgo (Pérez, 2005): propensas, indiferentes o adversas al riesgo. Para una persona con aversión al riesgo tiene más utilidad el valor que proporciona la media de un proceso obtenida en forma segura, que la utilidad esperada, es decir, $U(E(\bar{x})) > E(U(\bar{x}))$, donde $\bar{X}$ denota el proceso (es una variable aleatoria), E es el operador esperanza matemática y U es la función de utilidad. Si el sentido de la desigualdad se invierte, se dice que la persona es propensa al riesgo, y cuando se convierte en igualdad entonces es neutral al riesgo. No se tiene explícitamente ninguna función utilidad del retorno U, pero partiendo del supuesto de que estamos trabajando para una persona adversa al riesgo, es posible aumentar algunas de sus propiedades:

- $U'(R) > 0$
- $U''(R) < 0$
- $\frac{d}{dR}\left[-\frac{U''(R)}{U'(R)}\right] \leq 0$

Como el problema de decisión está planteado en forma probabilística, entonces la utilidad esperada $E(U(R_p))$ constituye la función adecuada por maximizar, en donde R_p es el retorno del portafolio en el período considerado. Markowitz genera el conjunto de carteras eficientes por medio de la solución de un conjunto de problemas de programación cuadrática. A continuación, con la función de utilidad del decisor y las carteras eficientes se selecciona la cartera que proporcione la mejor combinación de riesgo y ganancia.

Elección del portafolio

Supóngase que se tiene un portafolio V compuesto por n activos entre acciones y opciones, sea W_i la ponderación del activo i respecto al valor del portafolio, con

$$w_i \geq 0, \forall i = 1,2 \dots n,\ \Sigma_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

Estos pesos varían con el tiempo, al cambiar los precios de los activos, pero en las condiciones del presente estudio permanecen constantes e iguales a sus valores en la fecha actual. Sean R_v la variación relativa del valor del portafolio y R_i la variación del retorno del *i-ésimo* activo. R_v es una combinación lineal de las rentabilidades de los activos que la componen: $R_v = \Sigma_{i=1}^{n} w_i R_i$.

Si se denotan como σ_v^2 la varianza del portafolio V y σ_{ij} la covarianza entre las tasas de retorno de los activos i y j $(i; j = 1,\dots, n)$, se tiene que

$$\sigma_v^2 = \Sigma_{i=1}^{n} w_i^2 \sigma_i^2 + 2\Sigma_{j=1,j\neq i}^{n} w_i w_j \sigma_{ij}.$$

Sin pérdida de generalidad se supondrá que en todos los casos se trata de cantidades positivas de cada activo. La formulación completa del problema queda entonces en la forma (Korn y Korn, 2001)

$$\begin{cases} \max. kR_v - \sigma^2 \\ \text{s. a.} \Sigma_{i=1}^{n} w_i = 1 \\ w_i \geq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

Los valores explícitos R_v y σ^2 en términos de las variables w_i se dieron en el comienzo de esta sección, así, para cada valor del parámetro real k se obtiene una solución específica (Dantzig y Thapa 1997) $W = [w_1, w_2 \dots, w_n]^t$ para el problema anterior que representa un portafolio y permite calcular la rentabilidad y el riesgo esperados del portafolio.

Cuadro 1. Desarrollo de la solución analítica de la integral que representa la covarianza entre las rentabilidades de los activos a y b.

$$cov(r_{a,}r_b) = E[r_a r_b]E[r_a]E[r_b] = \int_R \int_R e^{x+y} f(x,y)dxdy$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_a\sigma_b\sqrt{1-\rho_{ab}^2}} \int_R \int_R e^{x+y} e^{-\frac{1}{2(1-\rho_{ab}^2)}\left[\frac{x-\mu_a}{\sigma_a^2} - 2\rho_{ab}\frac{x-\mu_a}{\sigma_a}\frac{y-\mu_b}{\sigma_b} + \frac{(y-\mu_b)^2}{\sigma_b^2}\right]} dxdy$$

$$= e_a^{\mu} + \mu_b + \frac{1}{2}(\sigma_a^2\sigma_b^2)(e^{\rho_{ab}\sigma_a\sigma_b} - 1)$$

Cálculo de covarianzas

Para la solución del problema (1) es necesario conocer la matriz de varianzas y covarianzas entre el retorno de los activos y las opciones.

Tasas de rentabilidad de los activos

Si se expresa la tasa de retorno de la acción r_a en términos de la variable $x = \ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right)$ se tiene que $r_a = e^x - 1$; por tanto, la esperanza de la tasa de rentabilidad del activo es

$$E[r_a] = \int_R (e^x - 1) f(x)dx$$

en donde $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

Igualmente la varianza de un activo se calcula mediante

$$var[r_a] = E[r_a^2] - E[r_a]^2$$

$$= \int_R e^{2x} f(x)dx - E[r_a]$$

Es bien sabido el valor de estas integrales (Vilariño, 2001) o (Cox y Cox, 2006). Así se tiene que

$$E[r_a] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2} - 1$$ y

$$var[r_a] = e^{2\mu}\left(e^{2\sigma^2} - e^{\sigma^2}\right).$$

Para dos activos distintos *a* y *b* la covarianza entre las rentabilidades está dada por la integral

$$cov(r_{a,}r_b) = E[r_a r_b]E[r_a]E[r_b]$$
$$= \int_R \int_R e^{x+y} f(x,y)dxdy$$

Donde *f(x,y)* es la función de densidad de probabilidad normal conjunta. El desarrollo de la solución analítica de esta integral se puede seguir en el cuadro 1.

Tasas de rentabilidad de las opciones

Si se expresan las tasas de rentabilidad de las opciones T_c y r_p en términos de la variable $x = \ln\left(\frac{S_T}{S_t}\right)$, se puede escribir la rentabilidad para las opciones mediante la fórmula:

$$r_c = \frac{\text{máx}\{Se^x - K_c, 0\} - \mathrm{c}}{c} \quad \text{y} \quad r_p = \frac{\text{máx}\{\mathrm{K_p} - Se^x, 0\} - \mathrm{P}}{P}$$

y se tiene que la expresión para la esperanza de la tasa de rentabilidad de las opciones toma la siguiente forma:

$$E[r_c] = \int_R \frac{\text{máx}\{Se^x - K_c, 0\} - \mathrm{c}}{c} f(x)dx$$
$$= \frac{S}{C\sqrt{\pi}} e^{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)} \int_{\frac{\ln\frac{K}{S} - \sigma^2 - \mu}{\sqrt{2\sigma}}}^{+\infty} e^{-u^2} du - \frac{K}{C\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\ln\frac{K}{S} - \mu}{\sqrt{2\sigma}}}^{+\infty} e^{-u^2} du - 1$$

Análogamente para la opción de venta tenemos

$$E[r_p] = \int_R \frac{\text{máx}\{\mathrm{K_p} - Se^x, 0\} - \mathrm{P}}{\mathrm{P}} f(x)dx$$
$$= \frac{K}{P\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{\ln K/S - \mu}{\sqrt{2\sigma}}} e^{-u^2} du - \frac{S}{P\sqrt{\pi}} e^{\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\frac{\ln K/S - \sigma^2 - u}{\sqrt{2\sigma}}} e^{-u^2} du - 1$$

En todos los cálculos en los que se incluya una opción de venta o de compra aparecerá por los menos una integral impropia del tipo $\int e^{-u^2} du$. Los métodos de cuadratura gaussiana, por ejemplo, proporcionan una vía para aproximar numéricamente el valor de estas integrales (Engeln-Müllges y Uhlig, 1996), que no son más que las covarianzas entre las opciones y entre los activos subyacentes y las opciones. Otra alternativa es usar una plataforma computacional de fuente abierta para computación numérica como Scilab 4.1.2., o cualquier otro como se sugiere en Castaño (2008).

Una vez que se tengan todas las entradas de la matriz de varianzas y covarianzas, se debe obtener el vector de pesos W para solucionar el problema de programación matemática (1).

Ilustración

Supóngase que una persona desea hacer una inversión en el mercado colombiano de derivados[2] de la cual espera obtener la mayor ganancia posible. Las alternativas que se presentan en el momento son cuatro:

- BAC2, ECO1
- Una opción europea de compra CBAC
- Una opción europea de venta PBAC

Se supone que la acción BAC2 es el activo subyacente de las opciones y que estas tienen la misma fecha de vencimiento. Si no hay restricción en cuanto al número de unidades adquiridas de acciones y opciones, entonces el problema de optimización de la cartera es el problema (1). En este caso, se calculan las rentabilidades logarítmicas de las acciones a partir de una muestra histórica con fecha final el momento actual, y luego se extrapolan hasta la fecha que coincida con la de vencimiento de las opciones. Con las rutinas implementadas para el cálculo de la rentabilidad esperada, de las varianzas y covarianzas de las acciones y las opciones es posible hallar la matriz $\sum$ que contiene la información de las varianzas y las covarianzas entre todos los activos que componen el portafolio.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} {\sigma_1}^2 & \cdots & \sigma_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \cdots & {\sigma_n}^2 \end{bmatrix}$$

Los datos para la simulación se tomaron de la página www.meff.es, los cuales corresponden al Mercado Oficial Español de Futuros y Opciones Financieros MEFF. En realidad MEFF permite negociar contratos de futuro y de opciones sobre índices de renta variable, de acciones y de contratos nocionales de tasas de interés. Las opciones negociadas en el MEFF son de estilo americano y de estilo europeo, por tanto, tomamos las cotizaciones de tipo europeo para poder aplicar la teoría expuesta en las secciones anteriores. La figura 3 muestra la selección del portafolio óptimo en el espacio riesgo x retorno, el riesgo en el eje x y el retorno en el eje y, para un nivel de riesgo dado se tiene un portafolio que es el que produce la mayor rentabilidad posible.

La inclusión de opciones en el portafolio expande las posibilidades de inversión, al mismo tiempo se posibilita su uso como método de cobertura ante el riesgo (Hull, 1997). Vale

2 En Colombia no existe aún un mercado organizado de productos financieros derivados, por lo cual las siglas usadas para representar las opciones y las acciones son meramente de carácter ilustrativo.

agregar que la solución que proporciona un portafolio eficiente puede no contener todos los activos disponibles.

El método expuesto puede ser aplicado de una manera natural para activos y derivados ligados a la energía.

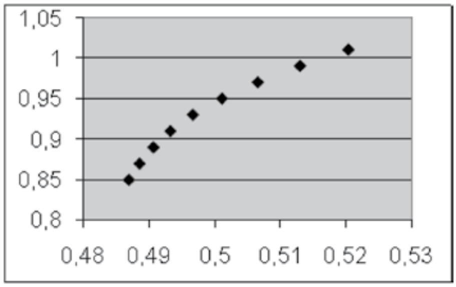

Figura 3. Frontera eficiente para inversión en el mercado MEFF. El eje x representa el riesgo del portafolio mientras que el eje y representa el retorno del portafolio.

Conclusiones

En este artículo se presenta una medología para resolver el problema de selección de portafolios óptimos en los que figuran acciones y opciones europeas sobre estas acciones. El método de solución está basado en el criterio media-varianza y las entradas de la matriz de covarianza se calculan por medio de aproximaciones numéricas de integrales impropias. Una vez conocida la matriz de covarianzas, un programa computacional apropiado de programación cuadrática resuelve el problema con rapidez.

Bibliografia

CAPINSKY, M. and ZASTAWNIAK, T. (2003).
Mathematics for Finance: an introduction to financial engineering. Londres. Springer-Verlag.

CASTAÑO, J. O. (2008).
Seleción óptima de portafolios incluyendo opciones, Tesis de Pregrado del programa de Matemáticas, Universidad de Antioquia, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Departamento de Matemáticas, Medellín.

COX, D. and COX, M. (2006).
The Mathematics of Banking and Finance. The Atrium, Southern Gate, Reino Unido. John Wiley & Sons.

DANTZIG, G. B. and Thapa, M. N. (1997).
Linear Programming, Introduction. New York, Springer.

ENGELN-MÜLLGES, G. and UHLIG F. (1996).
Numerical Algorithms with C. New York, Springer.

HULL, J. C. (1997).
Options, Futures, and other Derivatives. Estados Unidos. Prentice-Hall.

KORN, R. and KORN, E. (2001).
Option Pricing and Portfolio Optimization-Modern Methods of Financial Mathematics. Estados Unidos. Graduates studies in mathematics. vol 31. American Mathematical Society.

PÉREZ, C. M. (2005).
Diversificación de portafolio y análisis de variables riesgosas en la toma de decisiones en un fondo de inversiones. Medellín. Trabajo de grado de Especialización en Finanzas y Evaluación de Proyectos. Universidad de Antioquia, Facultad de Ingeniería.

VENEGAS., F. (2006).
Riesgos financieros y económicos – Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre. México, D. F., Thomson.

VILARIÑO A. (2001).
Turbulencias financieras y riesgos de mercado. España. Prentice Hall.

WILMOTT, P., HOWISON, S. and DEWYNNE, J. (1997).
The Mathematics of Financial Derivatives- A Student Introduction. Estados Unidos. Cambridge.

Mercado Español de Futuros Financieros. MEFF. Disponible en: www.meff.es